

III. Transformée de Fourier

Soit la série de Fourier complexe

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t} \quad \text{et} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

Nous appelons la fonction g au lieu de f pour ne pas confondre avec la fréquence f .

avec $\omega_n = n\omega = 2\pi n/T \Rightarrow \Delta\omega = \omega_n - \omega_{n-1} = 2\pi n/T - 2\pi(n-1)/T = 2\pi/T$

$\Rightarrow \Delta\omega = 2\pi/T \rightarrow 1/T = \Delta\omega/2\pi$

Remplaçons c_n dans $g(t)$:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-i\omega_n t} dt \right] e^{i\omega_n t}$$

Remplaçant $1/T$ par $\Delta\omega/2\pi$

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-i\omega_n t} dt \right] e^{i\omega_n t}$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-i\omega_n t} dt \right] e^{i\omega_n t} \Delta\omega$$

En se servant de la somme de Riemann qui s'énonce comme suit:

soit un intervalle $[a, b]$ partitionné en plusieurs points tel que

$a < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < b$, et les intervalles entre ces points sont:

$\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta x_4, \dots$ et Δx_n . Soit y , un point d'un sous-intervalle Δx_k , alors la somme d'une

fonction g des points y correspondants dans chaque sous-intervalle Δx_k est donnée par: $\sum_{k=1}^n g(y) \Delta x_k$

et cette fonction devient une intégrale lorsque les sous-intervalles Δx tendent vers 0.

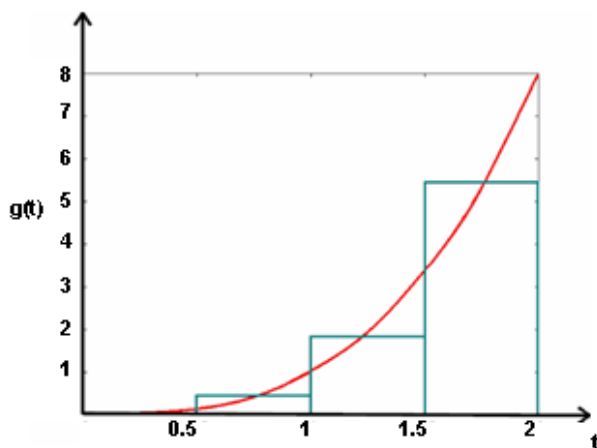


Figure. Somme de Riemann.

Dans la fonction $g(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-i\omega_n t} dt \right] e^{i\omega_n t} \Delta\omega$ et $\Delta\omega = 2\pi/T$

lorsque $T \rightarrow \infty$, $\Delta\omega \rightarrow 0$, ce qui justifie l'utilisation de l'intégrale de Riemann:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt \right] e^{i\omega t} d\omega$$

Puisque $\omega_n = n\omega$ avec $\Delta\omega = \omega_n - \omega_{n-1}$, l'indice n est omis et l'intégration se fait sur ω .

Définissons:

$$G(\omega) = TF(g(t)) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt \right] \quad TF = \text{transformée de Fourier}$$

et $g(t) = TF^{-1}(G(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad TF^{-1} = \text{Transformée de Fourier inverse.}$

La variable dans le domaine de Fourier, correspondant à la variable spatiale x (cm) ou à la variable temporelle t (sec), est la fréquence f. f a l'unité de cm^{-1} ou s^{-1} (Hertz, Hz).

En posant $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi f$, soit $f = 1/T$ et les transformées de Fourier deviennent:

$$G(f) = TF(g(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

$$g(t) = TF^{-1}(G(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{i2\pi f t} df$$

Pour que TF existe, il faut que g(t) soit de carré intégrable: $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt < \infty$. D'autres définitions:

g(t) définie sur [0, T] et à valeurs complexes. Elle est de carré intégrable si $\int_0^T |g(t)|^2 dt < \infty$. Aussi,

la condition pour que G(f) existe est que g(t) soit absolument intégrable: $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty$.

Exemple 1:

Calculer la TF de $g(t) = \exp(-\alpha t)$ pour $t > 0$; et $g(t) = 0$ pour $t < 0$; $\alpha > 0$.

Par définition: $G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi f t} dt$

$$G(f) = \int_{-\infty}^0 0 e^{-i2\pi f t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-i2\pi f t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + i2\pi f)t} dt$$

$$G(f) = \left[\frac{1}{-(\alpha + i2\pi f)} e^{-(\alpha + i2\pi f)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha + i2\pi f} = \frac{\alpha - i2\pi f}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}$$

Le module est : $|G(f)| = \sqrt{\frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + 4\pi^2 f^2)^2} + \frac{4\pi^2 f^2}{(\alpha^2 + 4\pi^2 f^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}}$

L'argument est : $\arg(G) = \arctg\left(\frac{-2\pi f}{\alpha}\right)$

G(f) peut s'écrire sous la forme $G(f) = |G(f)| \exp(i \arg(G))$:

$$G(f) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}} \exp\left[i \arctg\left(-\frac{2\pi f}{\alpha}\right)\right]$$

$\alpha=0.05$; $ts=1$; $t=0:ts:100$; $N=length(t)$;

Pour retrouver avec plus de précision les fréquences sur le graphique des transformées de Fourier, on doit augmenter le nombre N de points dans la transformée de Fourier en allongeant avec des zeros la fonction de départ.

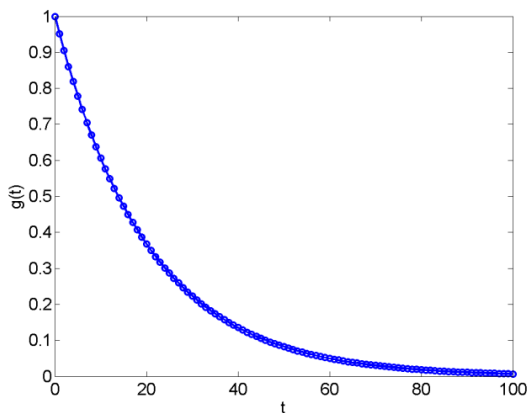


Figure. $g(t) = \exp(-0.05t)$ avec $t = 0:1:100$.

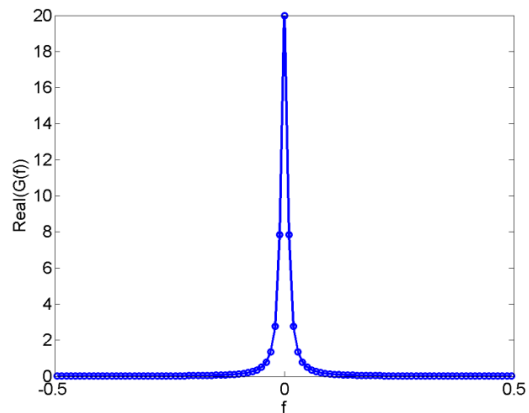


Figure. $\text{Re}(G(f))$.

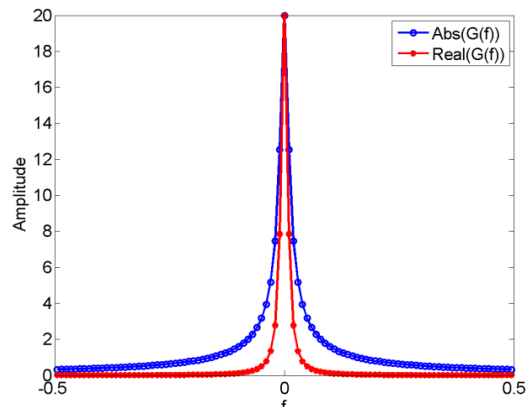
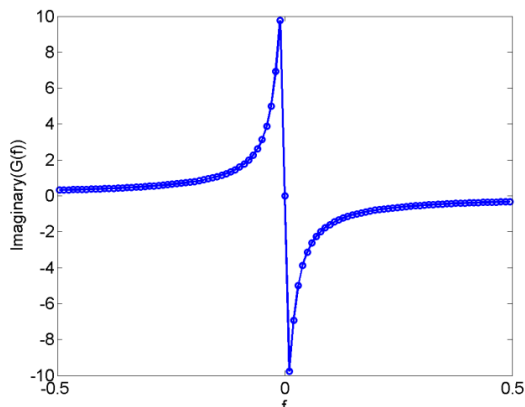


Figure. Im(G(f)).

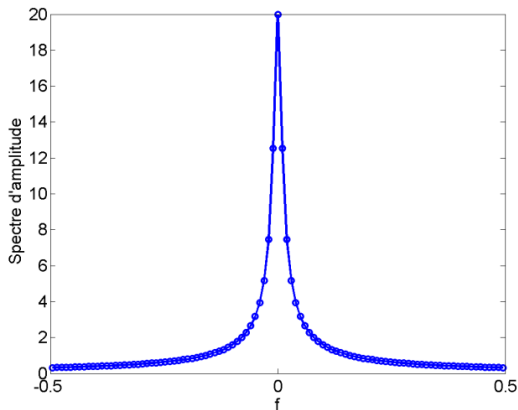


Figure. Spectre d'amplitude.

Figure. Abs(G(f)). ($z = a + ib; |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$)

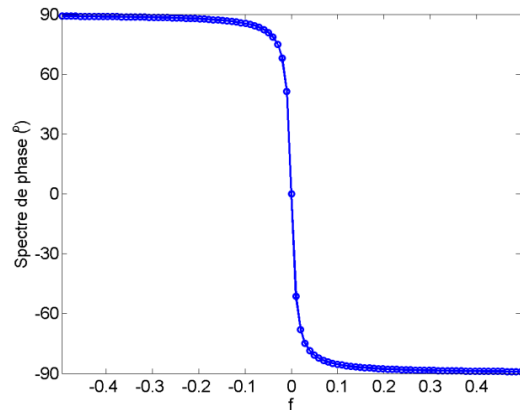


Figure. Spectre de phase.

Calcul de la transformée inverse de $G(f) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}} \exp\left[i \cdot \text{arctg}\left(-\frac{2\pi f}{\alpha} \right) \right]$

La formule s'écrit : $g(t) = TF^{-1}(G(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{i2\pi ft} df$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}} e^{\left[i \cdot \text{arctg}\left(-\frac{2\pi f}{\alpha} \right) \right]} e^{i2\pi ft} df$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}} e^{\left[i \cdot (2\pi ft - \text{arctg}\left(\frac{2\pi f}{\alpha} \right)) \right]} df \dots\dots\dots \text{approche compliquée}$$

Si l'on garde $G(f) = \frac{1}{\alpha + i2\pi f} \Rightarrow g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha + i2\pi f} e^{i2\pi ft} df$

on multiplie et on divise par $e^{\alpha t}$: $g(t) = \frac{1}{e^{\alpha t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha + i2\pi f} e^{\alpha t} e^{i2\pi ft} df$

$$\Rightarrow g(t) = \frac{1}{e^{\alpha t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha + i2\pi f} e^{(\alpha + i2\pi f)t} df$$

soit $u = \alpha + i2\pi f \Rightarrow du = i2\pi df \Rightarrow df = du/i2\pi$.

$$\Rightarrow g(t) = \frac{e^{-\alpha t}}{i2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u} e^{ut} du \dots\dots\dots \text{On doit recourir aux tables d'intégration.}$$

Exemple 2:

Calculer la TF de $g(t) = 1$ si $|t| < d$ et $g(t) = 0$ si $|t| > d$, et $d > 0$.

Par définition:
$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi ft} dt$$

$$G(f) = \int_{-d}^d e^{-i2\pi ft} dt = \left. \frac{e^{-i2\pi ft}}{-i2\pi f} \right|_{-d}^d = \frac{1}{-i2\pi f} (e^{-i2\pi fd} - e^{i2\pi fd})$$

$$G(f) = \frac{1}{i2\pi f} (e^{i2\pi fd} - e^{-i2\pi fd}) = d \left(\frac{e^{i2\pi fd} - e^{-i2\pi fd}}{i2\pi fd} \right) = 2d \frac{\sin(2\pi fd)}{2\pi fd}$$

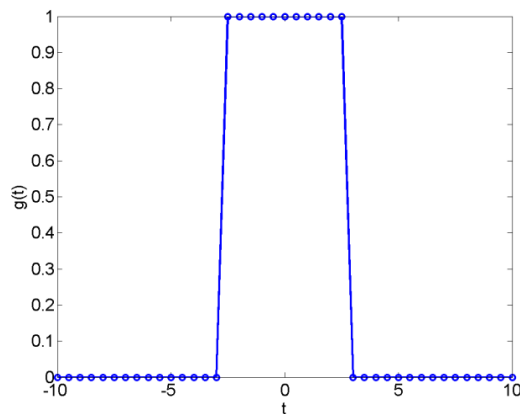
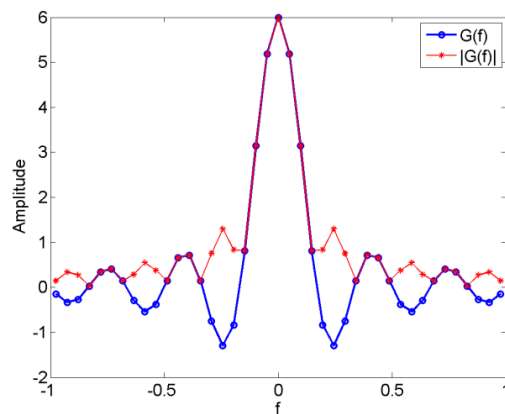


Figure. $g(t)$ avec $T=20$, $d=3$, $ts=0.5$.



$G(f)$ et spectre d'amplitude.

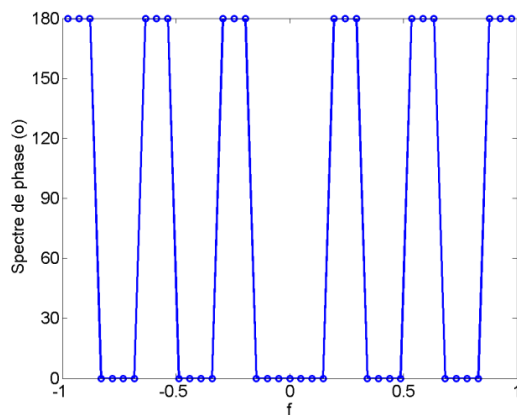


Figure. Spectre de phase.

Exemple 3:

Calculer la TF de $g(t) = \cos(\omega_0 t)$ pour $|t| < d/2$, $d > 0$ et $g(t)=0$ ailleurs.

Par définition:
$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi ft} dt$$

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t)e^{-i2\pi ft} dt = \frac{1}{2} \int_{-d/2}^{d/2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})e^{-i2\pi ft} dt$$

$$G(f) = \frac{1}{2} \int_{-d/2}^{d/2} (e^{i(\omega_0 - 2\pi f)t} + e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)t}) dt = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{i(\omega_0 - 2\pi f)t}}{i(\omega_0 - 2\pi f)} - \frac{e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)t}}{i(\omega_0 + 2\pi f)} \right]_{-d/2}^{d/2}$$

$$G(f) = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{i(\omega_0 - 2\pi f)d/2} - e^{-i(\omega_0 - 2\pi f)d/2}}{i(\omega_0 - 2\pi f)} - \frac{e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)d/2} - e^{i(\omega_0 + 2\pi f)d/2}}{i(\omega_0 + 2\pi f)} \right]$$

$$G(f) = \frac{d}{2} \left[\frac{e^{i(\omega_0 - 2\pi f)d/2} - e^{-i(\omega_0 - 2\pi f)d/2}}{2i(\omega_0 - 2\pi f)d/2} + \frac{e^{i(\omega_0 + 2\pi f)d/2} - e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)d/2}}{2i(\omega_0 + 2\pi f)d/2} \right]$$

$$G(f) = \frac{d}{2} [\sin c((\omega_0 - 2\pi f)d/2) + \sin c((\omega_0 + 2\pi f)d/2)]$$

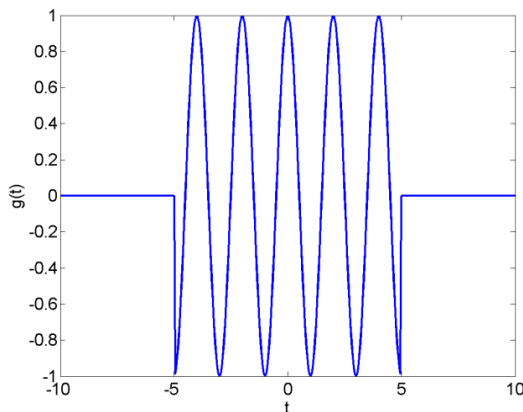


Figure. $g(t) = \cos(2\pi f_0 t)$. $f_0 = 0.5$ et $T = 2$.
 $t_s = 0.5$; $t = -10:t_s:10$; $d = 10$.

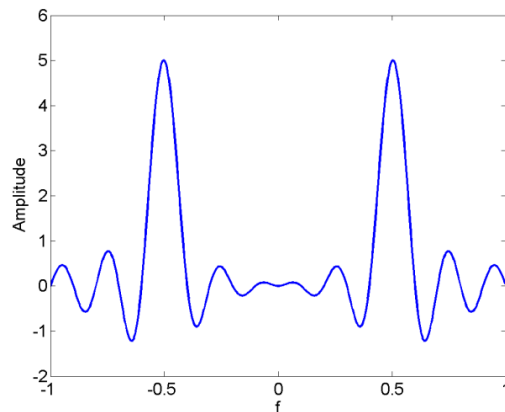


Figure. $G(f)$.

Exemple 4 :

Calculer la TF de $g(t) = \sin(\omega_0 t)$ pour $|t| < d/2$, $d > 0$ $g(t)=0$ ailleurs.

Par définition:
$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi ft} dt$$

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega_0 t)e^{-i2\pi ft} dt = \frac{1}{2i} \int_{-d/2}^{d/2} (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t})e^{-i2\pi ft} dt$$

$$G(f) = \frac{1}{2i} \int_{-d/2}^{d/2} (e^{i(\omega_0 - 2\pi f)t} - e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)t}) dt = \frac{1}{2i} \left[\frac{e^{i(\omega_0 - 2\pi f)t}}{i(\omega_0 - 2\pi f)} - \frac{e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)t}}{-i(\omega_0 + 2\pi f)} \right]_{-d/2}^{d/2}$$

$$G(f) = \frac{1}{2i} \left[\frac{e^{i(\omega_0 - 2\pi f)d/2} - e^{-i(\omega_0 - 2\pi f)d/2}}{i(\omega_0 - 2\pi f)} + \frac{e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)d/2} - e^{i(\omega_0 + 2\pi f)d/2}}{i(\omega_0 + 2\pi f)} \right]$$

$$G(f) = \frac{d}{2i} \left[\frac{e^{i(\omega_0 - 2\pi f)d/2} - e^{-i(\omega_0 - 2\pi f)d/2}}{2i(\omega_0 - 2\pi f)d/2} + \frac{e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)d/2} - e^{i(\omega_0 + 2\pi f)d/2}}{2i(\omega_0 + 2\pi f)d/2} \right]$$

$$G(f) = \frac{d}{2i} \left[\frac{e^{i(\omega_0 - 2\pi f)d/2} - e^{-i(\omega_0 - 2\pi f)d/2}}{2i(\omega_0 - 2\pi f)d/2} - \frac{e^{i(\omega_0 + 2\pi f)d/2} - e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)d/2}}{2i(\omega_0 + 2\pi f)d/2} \right]$$

$$G(f) = \frac{d}{2i} [\text{sinc}((\omega_0 - 2\pi f)d/2) - \text{sinc}((\omega_0 + 2\pi f)d/2)]$$

$$G(f) = -\frac{id}{2} [\text{sinc}((\omega_0 - 2\pi f)d/2) - \text{sinc}((\omega_0 + 2\pi f)d/2)]$$

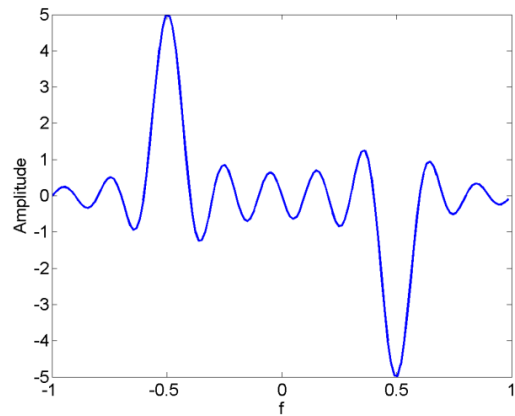
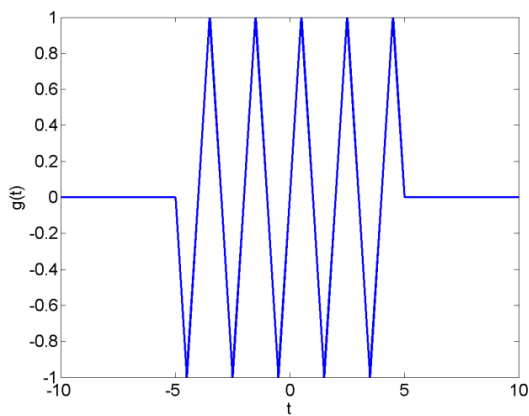


Figure. $g(t)=\sin(2\pi f_0 t)$. $f_0=0.5$ et $T=2$. Figure. $G(f)$.
 $ts=0.5$; $t=-10:ts:10$; $d=10$.

Autre exemple: La TF de $g(t) = \exp(-t^2)$.

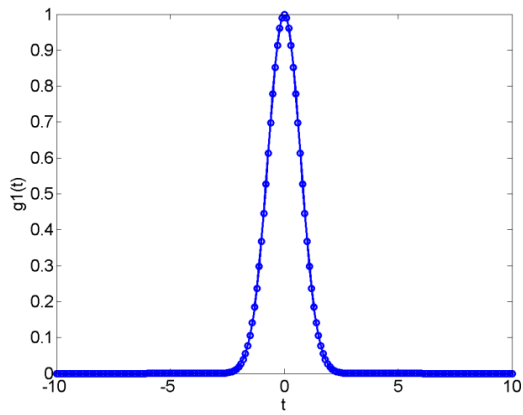


Figure. $g_1(t)=\exp(-t^2)$; $\text{sum}(g_1)=17.72$,

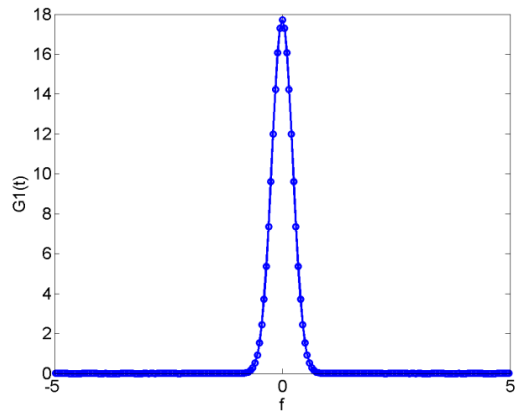


Figure. $\text{FT}[g_1(t)]$.

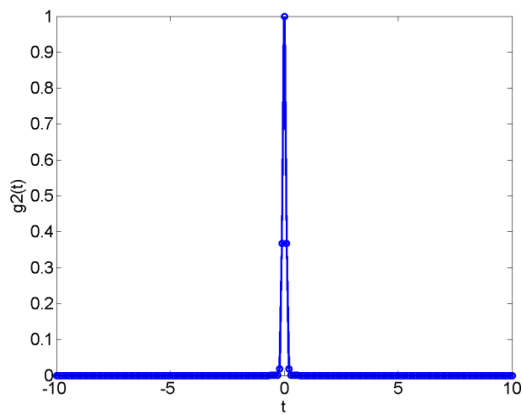


Figure. $g_2(t)=\exp(-(10t)^2)$. $\text{sum}(g_2)=1.77$.

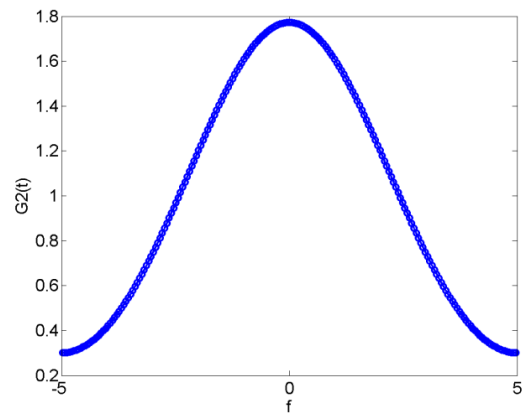


Figure. $\text{FT}[g_2(t)]$. g dense $\Rightarrow G$ large: