II.3. Les Séries de Fourier

Supposons que $f(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{L})\right]$ (1)

autrement dit la somme de sinus/cosinus converge vers f(x) sur [-L,L]. On peut alors que pour n=1,2,3,... :

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})dx; \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})dx; \quad A = \frac{a_0}{2} \tag{2}$$

Noter que généralement on utilise la lettre T pour les périodes en temps et la lettre L (ou D ...) pour les périodes en longueur (distance).

Notons aussi que si l'identité (1) a lieu, comme les sinus et cosinus sont des fonctions périodiques, la fonction f (x) de gauche, même si elle n'est définie que sur [0,T] à priori peut être considérée définie sur R avec la propriété dite de périodicité $\boldsymbol{f(x+T) = f(x), \forall\, x \in R}$

En multipliant (1) par cos(nπx/L) et en intégrant entre -L et L (ce qui revient à faire le produit Hermitien entre f(x) et cos(nπx/L), $\langle f(x), \cos(\mathrm{mx/L}) \rangle$):

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{m\pi x}{L})dx = A\int_{-L}^{L}\cos(\frac{m\pi x}{L})dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-L}^{L}\cos(\frac{m\pi x}{L})\cos(\frac{n\pi x}{L})dx + b_n\int_{-L}^{L}\cos(\frac{m\pi x}{L})\sin(\frac{n\pi x}{L})dx\right\} \tag{3}$$

Prenons le premier terme:

$$A\int_{-L}^{L}\cos(\frac{m\pi x}{L})dx = A\left[\frac{L}{m\pi}\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right]_{-L}^{L} = \frac{AL}{m\pi}\left[\sin\left(\frac{m\pi L}{L}\right) - \sin\left(-\frac{m\pi L}{L}\right)\right] =$$

$$\frac{AL}{m\pi}\left[\sin(m\pi) - \sin(-m\pi)\right] = 0$$

Prenons le deuxième terme:

$$a_n\int_{-L}^{L}\cos(\frac{m\pi x}{L})\cos(\frac{n\pi x}{L})dx = \frac{a_n}{2}\int_{-L}^{L}\left[\cos(\frac{m\pi x}{L} + \frac{n\pi x}{L}) + \cos(\frac{m\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L})\right]dx =$$

$$\frac{a_n}{2}\int_{-L}^{L}\left[\cos(\frac{(m+n)\pi x}{L}) + \cos(\frac{(m-n)\pi x}{L})\right]dx = \qquad \text{avec } m \neq n.$$

$$\frac{a_n}{2}\left[\frac{L}{(m+n)\pi}\sin(\frac{(m+n)\pi x}{L}) + \frac{L}{(m-n)\pi}\sin(\frac{(m-n)\pi x}{L})\right]_{-L}^{L} = 0$$

Si m = n:

$$a_n \int_{-L}^{L} \cos(\frac{m\pi x}{L})\cos(\frac{n\pi x}{L})dx = a_n \int_{-L}^{L} \cos^2(\frac{n\pi x}{L})dx = a_n \int_{-L}^{L} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\frac{2n\pi x}{L})dx =$$

$$a_n \left[\frac{x}{2} + \frac{L}{4n\pi}\sin(\frac{2n\pi x}{L})\right]_{-L}^{L} = a_n \left[\frac{L}{2} + \frac{L}{4n\pi}\sin(\frac{2n\pi L}{L}) - \left(\frac{-L}{2} + \frac{L}{4n\pi}\sin(\frac{-2n\pi L}{L})\right)\right] = a_n L$$

Prenons le troisième terme:

$$b_n \int_{-L}^{L} \cos(\frac{m\pi x}{L})\sin(\frac{n\pi x}{L})dx = b_n \int_{-L}^{L} \frac{1}{2}\left[\sin(\frac{(m+n)\pi x}{L}) + \sin(\frac{(m-n)\pi x}{L})\right]dx =$$

$$\frac{b_n}{2}\left[-\frac{L}{(m+n)\pi}\cos(\frac{(m+n)\pi x}{L}) - \frac{L}{(m-n)\pi}\cos(\frac{(m-n)\pi x}{L})\right]_{-L}^{L} = \qquad \text{avec } m \neq n.$$

$$\frac{b_n}{2}\left[-\frac{L\cos((m+n)\pi)}{(m+n)\pi} - \frac{L\cos((m-n)\pi)}{(m-n)\pi} - \left(-\frac{L\cos((m+n)\pi)}{(m+n)\pi} - \frac{L\cos((m-n)\pi)}{(m-n)\pi}\right)\right] = 0$$

Si m = n:

$$b_n \int_{-L}^{L} \cos(\frac{m\pi x}{L})\sin(\frac{n\pi x}{L})dx = b_n \int_{-L}^{L} \frac{1}{2}\left[\sin(\frac{(n+n)\pi x}{L}) + \sin(\frac{(n-n)\pi x}{L})\right]dx =$$

$$\frac{b_n}{2}\left[-\frac{L}{2n\pi}\cos(\frac{2n\pi x}{L})\right]_{-L}^{L} = \frac{b_n}{2}\left[-\frac{L}{2n\pi}\cos(2n\pi) - \left(-\frac{L}{2n\pi}\cos(2n\pi)\right)\right] = 0$$

Si m = n = 0:

$$b_n \int_{-L}^{L} \cos(\frac{m\pi x}{L})\sin(\frac{n\pi x}{L})dx = 0$$

Finalement, l'équation (3) se résume à :

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})dx = a_n L \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})dx \qquad \text{pour } n = 1,2,3,...$$

Refaisons la même procédure en prenant le produit Hermitien entre f(x) et sin(nπx/L) (⟨$f(x)$, sin(m⍰x/L) ⟩):

$$\int_{-L}^{L} f(x)\sin(\frac{m\pi x}{L})dx = A\int_{-L}^{L}\sin(\frac{m\pi x}{L})dx +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \int_{-L}^{L}\sin(\frac{m\pi x}{L})\cos(\frac{n\pi x}{L})dx + b_n \int_{-L}^{L}\sin(\frac{m\pi x}{L})\sin(\frac{n\pi x}{L})dx\right\}$$

$$= b_m L \quad avec\ m = n\ et\ m \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})dx} \quad \text{pour n = 1,2,3,...}$$

Finalement, prenons le produit Hermitien entre f(x) et 1, $\langle f(x), 1 \rangle$:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{L} Adx + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \int_{-L}^{L}\cos(\frac{n\pi x}{L})dx + b_n \int_{-L}^{L}\sin(\frac{n\pi x}{L})dx\right\}$$

Le premier terme donne :

$$\int_{-L}^{L} Adx = 2AL$$

Le second terme donne :

$$\int_{-L}^{L}\cos(\frac{n\pi x}{L})dx = \left[\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{n}\pi}\sin(\frac{n\pi x}{L})\right]_{\text{-L}}^{\text{L}} = 0$$

Le 3^{e} terme donne :

$$\int_{-L}^{L}\sin(\frac{n\pi x}{L})dx = \left[-\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{n}\pi}\cos(\frac{n\pi x}{L})\right]_{\text{-L}}^{\text{L}} = -\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{n}\pi}\cos(n\pi) - (-\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{n}\pi}\cos(n\pi)) = 0$$

Finalement :

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2AL \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dt$$

et posons n = 0 dans $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})dx$, nous obtenons: $a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \Rightarrow \quad A = \frac{a_0}{2}$

Conclusion:

La série de Fourier de f(x) s'exprime, avec L la demi-période:

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos(\frac{n\pi x}{L}) + b_n\sin(\frac{n\pi x}{L})\right\}}$$

avec

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \\ a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})dx \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})dx \end{aligned}}$$

Des fois on écrit la série de Fourier de f(t) comme SF(f(t)), $SF_f(t)$ ou $S_f(t)$

Lorsqu'on utilise la période T, on préfère écrire T au lieu de T/2. De même que les bornes de l'intégrale peuvent être indiquées par t_1 et t_2 avec $t_2 - t_1 = T$. Habituellement, mais pas obligatoirement, $t_1 = -T/2$ et $t_2 = T/2$.

Par analogie entre la période spatiale 2L et la période temporelle T, les équations des séries de Fourier s'écrivent:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \cos(\frac{\pi n x}{L}) + b_n \sin(\frac{\pi n x}{L})\right\} \quad \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \cos(\frac{2\pi n t}{T}) + b_n \sin(\frac{2\pi n t}{T})\right\}$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = \frac{1}{T/2}\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{\pi n x}{L})dx \quad \Leftrightarrow \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\cos(\frac{2\pi n t}{T})dt$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(\frac{\pi n x}{L})dx \quad \Leftrightarrow \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\sin(\frac{2\pi n t}{T})dt$$

En se servant de la forme $\omega = \frac{2\pi}{T}$, les équations se simplifient davantage en écriture:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\cos(\frac{2\pi n t}{T})dt \quad \Leftrightarrow \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\cos(\omega n t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\sin(\frac{2\pi n t}{T})dt \quad \Leftrightarrow \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\sin(\omega n t)dt$$

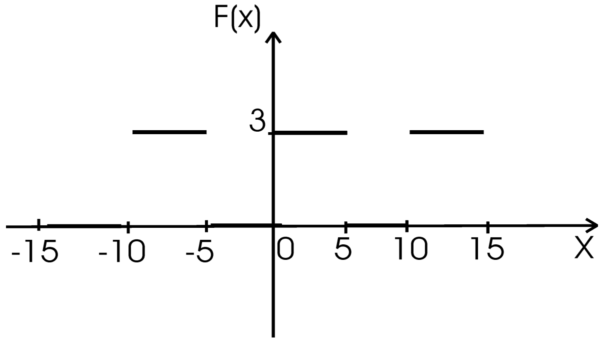
Noter que l'on peut écrire $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et alors $\omega n = \frac{2\pi n}{T}$, ou bien en définissant ω_0 comme la vitesse angulaire (ou pulsation) fondamentale, alors $\omega n = n\omega_0$. Il est possible aussi que n soit écrit en indice comme $\omega_n = n\omega_0$ et $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$.

Exemple 1:

a) Trouver les coefficients de Fourier de la fonction f(x) de période 10:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -5 \le x < 0 \\ 3 & 0 \le x < 5 \end{cases}$$

b) Tracer f(x) pour x=-20 à 20 avec des pas de 0.1 et pour n=1; n=1 à 3; n=1 à 10 et pour n=1 à 100.



La période vaut 10, donc de -L à L vaut 10 ⇒ 2L = 10 ou L = 5.

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})dx; \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})dx; \quad a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{5})dx; \quad b_n = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{5})dx; \quad a_0 = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)dx$$

$$a_0 = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)dx = \frac{1}{5}\left\{\int_{-5}^{0} 0dx + \int_{0}^{5} 3dx\right\} = \frac{1}{5}\left[3x\right]_0^5 = 3$$

$$a_n = \frac{1}{5}\left\{\int_{-5}^{0} 0\cos(\frac{n\pi x}{5})dx + \int_{0}^{5} 3\cos(\frac{n\pi x}{5})dx\right\} = \frac{3}{5}\frac{5}{n\pi}\left[\sin(\frac{n\pi x}{5})\right]_0^5 = 0 \quad avec\ n \ne 0$$

$$b_n = \frac{1}{5}\left\{\int_{-5}^{0} 0\sin(\frac{n\pi x}{5})dx + \int_{0}^{5} 3\sin(\frac{n\pi x}{5})dx\right\} = \frac{3}{5}\frac{5}{n\pi}\left[-\cos(\frac{n\pi x}{5})\right]_0^5 = \frac{3}{n\pi}(1-\cos(n\pi))$$

$$f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(1-\cos(n\pi))}{n\pi}\sin(\frac{n\pi x}{5})$$

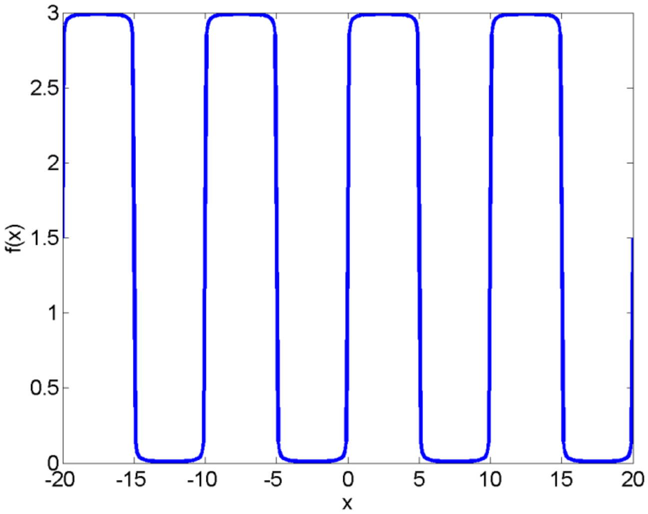
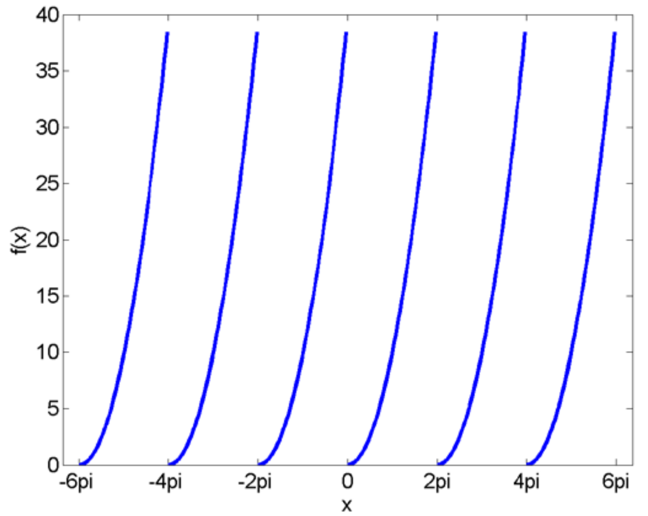


Figure. Série de Fourier de f(x) tracée avec Matlab pour x = -20:0.1:20 et n = 1 à 100.

Exemple 2:

Trouver la série de Fourier de la fonction $f(x) = x^2$ pour $0 < x < 2\pi$, si la période est 2π.



Graphique de $f(x) = x^2$ **répétée** à chaque 2π.

La période vaut 2π, donc de -L à L vaut 2π: $2L = 2\pi$ ou $L = \pi$.

Au lieu de considérer l'intégrale de -L à L, on la considère de 0 à 2L selon l'énoncé de f(x).

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{2\pi} x^2 dx\right\} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\left\{\int_0^{2L} x^2 \cos(\frac{n\pi x}{L})dx\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{2\pi} x^2 \cos(\frac{n\pi x}{\pi})dx\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{2\pi} x^2 \cos(nx)dx\right\}$$

$$= \frac{4}{n^2}$$

avec $\int x^2\cos(ax)dx = \frac{2\mathrm{x}}{\mathrm{a}^2}\cos(ax)+(\frac{x^2}{a}-\frac{2}{a^3})\sin(ax)$ ou par integration par partie 2 fois : $u_1=x^2$ et $du_1=2xdx$; ensuite $u_2=2x$ et $du_2=2dx$.

$$b_n = \frac{1}{L}\left\{\int_0^{2L} x^2\sin(\frac{n\pi x}{L})dx\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{2\pi} x^2\sin(\frac{n\pi x}{\pi})dx\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{2\pi} x^2\sin(nx)dx\right\}$$
$$= -\frac{4\pi}{\mathrm{n}}$$

avec $\int x^2\sin(ax)dx = \frac{2\mathrm{x}}{\mathrm{a}^2}\sin(ax)+(-\frac{x^2}{a}+\frac{2}{a^3})\cos(ax)$ ou par integration par partie 2 fois : $u_1=x^2$ et $du_1=2xdx$; ensuite $u_2=2x$ et $du_2=2dx$.

$$\Rightarrow f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{n^2}\cos(nx) - \frac{4\pi}{n}\sin(nx)\right] \quad \text{avec } 0 < \mathrm{x} < 2\pi$$

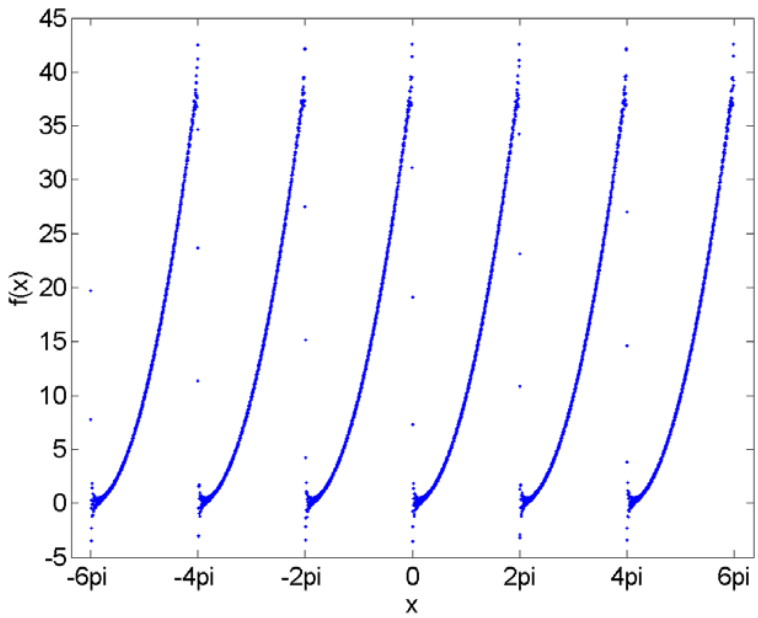


Figure. Série de Fourier de f(x) tracée avec Matlab pour x = -6π:0.01:6π-0.01 et n = 1 à 100.

Exercices:
Trouver la série de Fourier de
1- f(t) = 1 pour -π < t < 0, f(t) = 0 pour 0 < t < π et f(t+2π) = f(t).

Réponse: $f(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}$

2- f(t) = t sur [-π,π] et f(t+2π) = f(t).

Réponse: $f(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin(nt)}{n}$

II.4. Les harmoniques.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos(\frac{2\pi n t}{T}) + b_n \sin(\frac{2\pi n t}{T}) \right\} \qquad (1)$$

peut s'écrire sous la forme:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\omega_0 n t - \theta_n) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \text{et} \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{T} = n\omega_0$$

Identifiant $c_0 = \frac{a_0}{2}$

Prenant les 2 termes entre accolades de (1), remplacer $2\pi n/T$ par $n\omega_0$, et multipliant et divisant par $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$:

$$a_n \cos(\omega_0 n t) + b_n \sin(\omega_0 n t) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left(\frac{a_n \cos(\omega_0 n t)}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} + \frac{b_n \sin(\omega_0 n t)}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \right)$$

En appelant $\cos(\theta_n) = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$, $\sin(\theta_n) = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$ et $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

on obtient:

$$\begin{aligned} a_n \cos(\omega_0 n t) + b_n \sin(\omega_0 n t) &= c_n \left[\cos(\theta_n) \cos(\omega_0 n t) + \sin(\theta_n) \sin(\omega_0 n t) \right] \\ &= c_n \left[\cos(\omega_0 n t - \theta_n) \right] \end{aligned}$$

Ainsi:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\omega_0 n t - \theta_n)$$

- La $n^{\text{ième}}$ composante de f(t) de pulsation $\omega_n = n\omega_0$ est appelée le $n^{\text{ième}}$ harmonique de la fonction périodique.
- La 1^{er} harmonique est appelé la composante fondamentale, et elle a la même période que la fonction f(t).
- $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T$ est la pulsation fondamentale ou fréquence angulaire fondamentale en radian/seconde (rad/sec).
- f_0 est la fréquence fondamentale en cycle/sec ou Hertz (Hz) ou $\sec^{-1}$.
- T est la période fondamentale en seconde.
- c_n et θ_n sont les harmoniques des amplitudes et des phases.