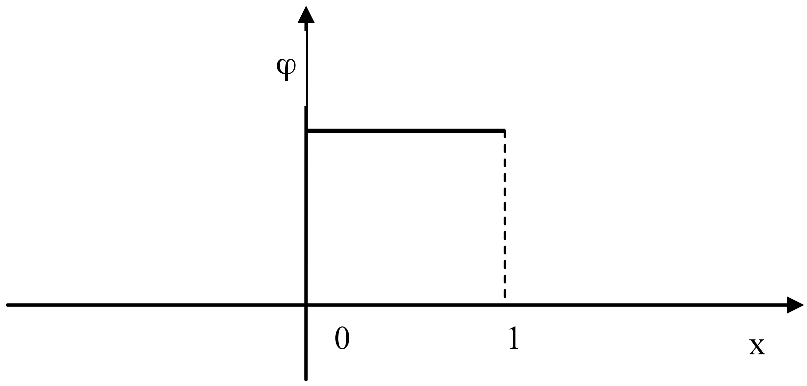
Théorie des ondelettes.

Les ondelettes de Haar

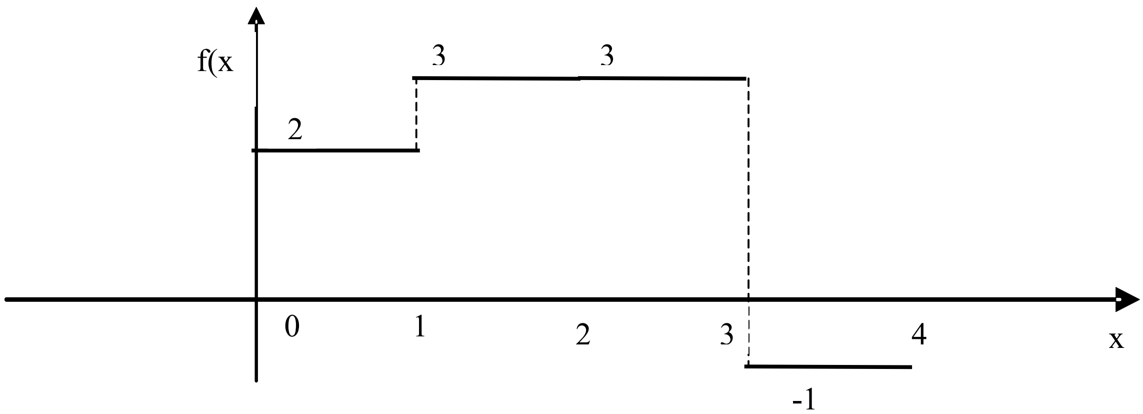
Nous avons vu la définition de la fonction suivante:

$$\varphi_{[0,1[}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Pour une fonction f(x) contenant plusieurs blocs, on l'exprime comme suit:

$$f(x) = 2\varphi(x) + 3\varphi(x-1) + 3\varphi(x-2) - \varphi(x-3)$$



D'une forme générale, f(x) s'exprime comme suit:

$$f(x) = \sum_{k \in Z} a_k \varphi(x-k) \qquad a_k \in R$$

Les ondelettes permettent de traiter des signaux de haute résolution ou haute fréquence. Les blocs devraient alors être raccourcis.

$\varphi(2x)$ raccourcit le bloc de moitié par rapport à $\varphi(x)$:
$\varphi(x)=1$ si $0 \le x < 1$
$\varphi(2x)=1$ si $0 \le 2x < 1$ ou $0 \le x < 1/2$

et la forme générale devient:

$f(x) = \sum_{k \in Z} a_k \varphi(2x - k)$ $a_k \in R$

$\varphi(4x)$ raccourcit le bloc de 4 fois par rapport à $\varphi(x)$:
$\varphi(x)=1$ si $0 \leq x < 1$
$\varphi(4x)=1$ si $0 \leq 4x < 1$ ou $0 \leq x < 1/4$
et la forme générale devient:

$f(x) = \sum_{k \in Z} a_k \varphi(4x - k)$ $a_k \in R$

En généralisant, on obtient la forme suivante:

$f(x) = \sum_{k \in Z} a_k \varphi(2^j x - k)$ $a_k \in R$ et $j \in N$

ici le paramètre j réfère à la dilatation et le paramètre k réfère à la translation.

Nous avons vu au début du chapitre précédent la définition de y:

$\psi_{[0,1[} = \varphi_{[0,1/2[} - \varphi_{[1/2,1[}$

Celle-ci peut prendre la forme:

$\psi(x) = \varphi(2x) - \varphi(2(x - 1/2)) = \varphi(2x) - \varphi(2x - 1)$

qui peut s'exprimer sous la forme générale:

$\psi(x) = \sum_{l \in Z} a_l \varphi(2x - l)$

L'ondelette ψ et la fonction d'échelle φ sont orthonormales:

$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\varphi(x-k)dx = 0$ qui peut être démontrée comme suit:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\varphi(x-k)dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\varphi(x)dx = 0 \ \text{ avec } k = 0 \ \Rightarrow \ \int_{0}^{1/2} 1\mathrm{dx} - \int_{1/2}^{1} 1\mathrm{dx} = 1/2 - 1/2 = 0$$

Il arrive dans certains ouvrages d'exprimer autant φ que ψ sous une forme paramétrique normalisée:

$$\varphi_k^j(x) = \sqrt{2^j}\,\varphi(2^j x - k)$$
$$\psi_k^j(x) = \sqrt{2^j}\,\psi(2^j x - k)$$

$j = 0, 1, 2, ...; k = 0, 1, ..., 2^j - 1$

Ces expressions sont identiques à celles précédemment annoncées, sauf le coefficient $2^{j/2}$ qui est un facteur de normalisation de façon à obtenir:

$$\left\langle \varphi_k^j, \varphi_k^j \right\rangle = \int_0^1 \left[\varphi_k^j(x)\right]^2 dx = 1$$

$$\left\langle \psi_k^j, \psi_k^j \right\rangle = \int_0^1 \left[\psi_k^j(x)\right]^2 dx = 1$$

Par le fait de la normalisation, les filtres de décomposition de Haar s'écrivent:
LD = [1   1]/$2^{1/2}$
HD = [1   -1]/$2^{1/2}$

En 2D, on obtient le filtre de décomposition suivant:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} / 2^{1/2}$$

Ce filtre est développé pour une matrice de 4 x 4 utilisé dans une multiplication matricielle:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} / 2^{1/2}$$

Le filtre de reconstruction est déduit par transposition du filtre de décomposition.

NOTE: ces filtres génèrent une matrice des coefficients comme suit:

$$\begin{bmatrix} ca & \mathrm{cv} \\ \mathrm{ch} & \mathrm{cd} \end{bmatrix}$$