

Les ondelettes.

Soit un phénomène physique représenté par la fonction $f(x)$ suivante :

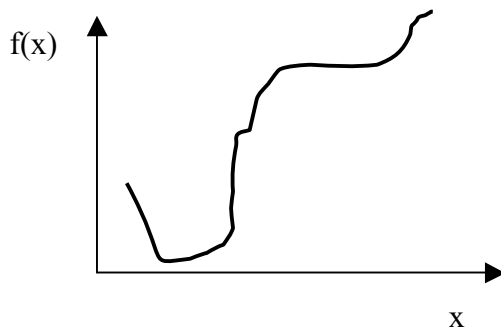


Figure. Signal réel.

Ce phénomène ne peut être mesuré ni représenté qu'à certains points spécifiques. Ces points pourraient être des valeurs ponctuelles ou des moyennes de valeurs sur un intervalle de temps, d'espace, d'énergie etc.... comme représenté à la figure suivante :

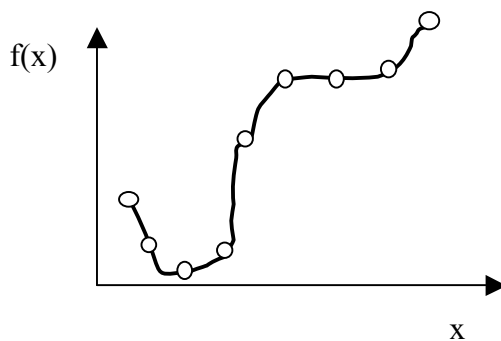


Figure. Signal mesuré à certains échantillonnages réguliers ou irréguliers.

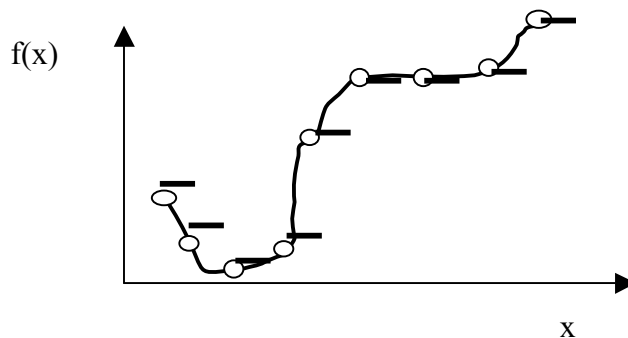
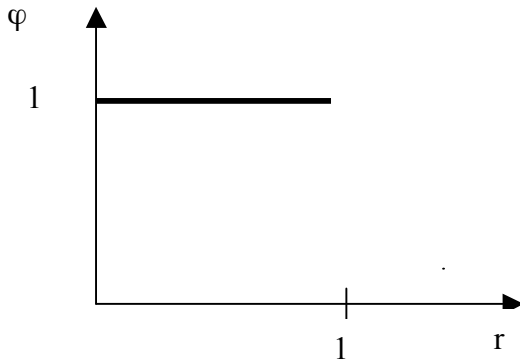


Figure. Au lieu de représenter un signal par des points échantillonnés, on peut le représenter par des barres horizontales, ou fonction en escalier. Ces barres devraient être de même longueur.

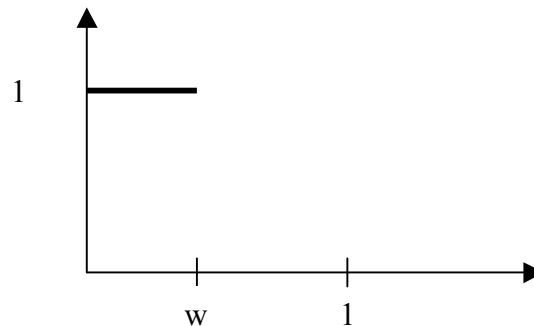
Le pas de chaque fonction en escalier (ou fonction à pas, step function) est défini sur un intervalle spécifique. La fonction à pas unitaire s'exprime par :

$$\varphi_{[0,1[}(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq r < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



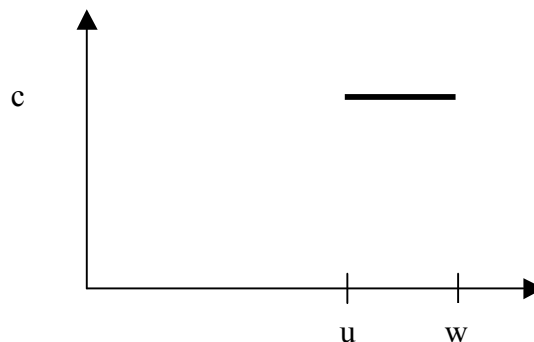
La fonction échantillonnée peut être représentée par des déplacements (shift) et des dilatations (dilation) des pas de la fonction à pas. Exemple rétrécissement du pas de 1 à w:

$$\varphi_{[0,w[}(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq r < w \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Déplacement de 0 vers u :

$$c\varphi_{[u,w[}(r) = \begin{cases} c & \text{si } u \leq r < w \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Forme générale pour un point quelconque j:

$$(s_j, r_j) = s_j \cdot \varphi_{[r_j, r_{j+1}[}(r) = \begin{cases} s_j & \text{si } r_j \leq r < r_{j+1} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

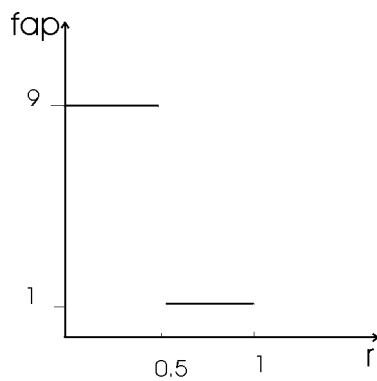
En considérant tous les pas approximant une fonction f par f_{ap} :

$$f_{ap} = s_0 \cdot \varphi_{[r_0, r_1[} + s_1 \cdot \varphi_{[r_1, r_2[} + \dots + s_{n-1} \cdot \varphi_{[r_{n-1}, r_n[} = \sum_{j=0}^{n-1} s_j \varphi_{[r_j, r_{j+1}[} = \sum_{j=0}^{n-1} (s_j, r_j)$$

Exemple 1.

j	0	1
r _j	0	1/2
s _j	9	1

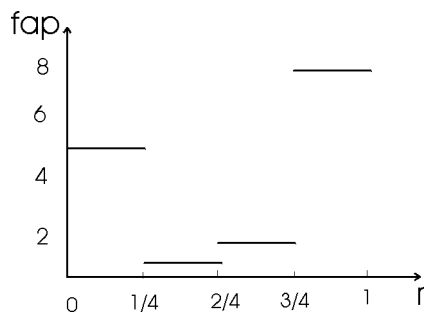
$$f_{ap} = \sum_{j=0}^{n-1} s_j \varphi_{[r_j, r_{j+1}[} = 9\varphi_{[0, 1/2[} + 1\varphi_{[1/2, 1[}$$



Exemple 2.

j	0	1	2	3
r _j	0	1/4	1/2	3/4
s _j	5	1	2	8

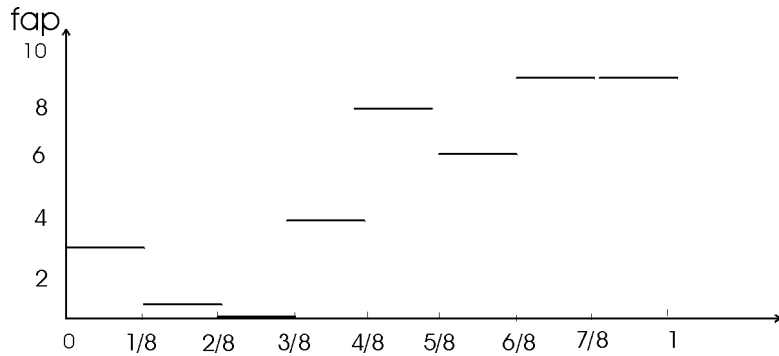
$$f_{ap} = \sum_{j=0}^{n-1} s_j \varphi_{[r_j, r_{j+1}[} = 5\varphi_{[0, 1/4[} + 1\varphi_{[1/4, 1/2[} + 2\varphi_{[1/2, 3/4[} + 8\varphi_{[3/4, 1[}$$



Exemple 3.

j	0	1	2	3	4	5	6	7
rj	0	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8
sj	3	1	0	4	8	6	9	9

$$f_{ap} = 3\varphi_{[0,1/8[} + 1\varphi_{[1/8,2/8[} + 0\varphi_{[2/8,3/8[} + 4\varphi_{[3/8,4/8[} + 8\varphi_{[4/8,5/8[} + 6\varphi_{[5/8,6/8[} + 9\varphi_{[6/8,7/8[} + 9\varphi_{[7/8,1[}$$



Exercice 1.

Écrire la somme et dessiner le graphique de:

rj	0	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8
sj	8	6	7	3	1	1	2	4

rj	0	1/4	2/4	3/4
sj	3	1	9	7

Exercice 2.

Montrer que $\varphi_{[0,w[}(r) = \varphi_{[0,1[}(r/w)$ $w > 0$

Montrer que $\varphi_{[u,w[}(r) = \varphi_{[0,1[}(\frac{r-u}{w-u})$ $u, w > 0$

L'ondelette de Haar :



11 Octobre 1885, Budapest - 16 mars 1933, Szeged, Hongrie.

En étudiant la divergence des fonctions continues, il a proposé une base orthonormale : l'ondelette de Haar (1909).

$$\psi_{[0,1[} = \varphi_{[0,1/2[} - \varphi_{[1/2,1[}$$

$$\psi_{[0,1[} = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq r < 1/2 \\ -1 & \text{si } 1/2 \leq r < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

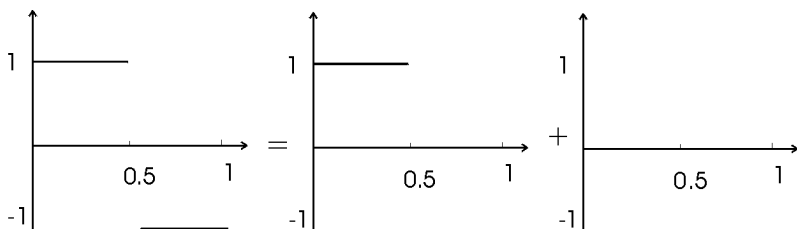


Figure. $\psi_{[0,1[} = \varphi_{[0,1/2[} - \varphi_{[1/2,1[}$

$$\varphi_{[0,1[} = \varphi_{[0,1/2[} + \varphi_{[1/2,1[}$$

$$\psi_{[0,1[} = \varphi_{[0,1/2[} - \varphi_{[1/2,1[}$$

En sommant, puis en soustrayant ces deux équations, on obtient :

$$\left[\varphi_{[0,1[} + \psi_{[0,1[} \right] \sqrt{2} = \varphi_{[0,1/2[}$$

$$\left[\varphi_{[0,1[} - \psi_{[0,1[} \right] \sqrt{2} = \varphi_{[1/2,1[}$$

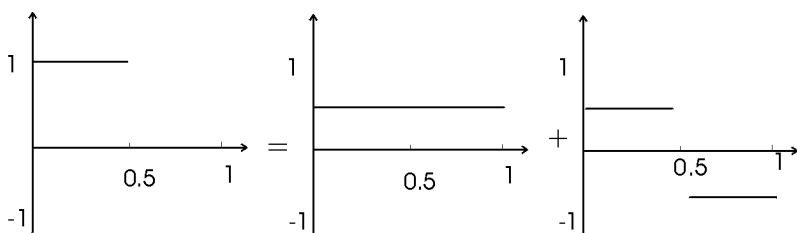


Figure. $\varphi_{[0,1/2[} = \left[\varphi_{[0,1[} + \psi_{[0,1[} \right] \sqrt{2}$

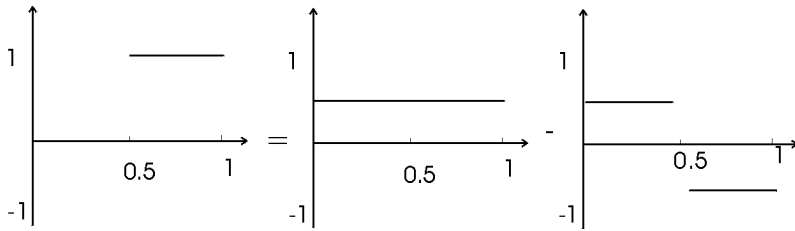


Figure. $\varphi_{[1/2,1[} = \left[\varphi_{[0,1[} - \psi_{[0,1[} \right] / 2$

Dans une expression générale :

$$\begin{aligned}
 f_{ap} &= s_0 \varphi_{[0,1/2[} + s_1 \varphi_{[1/2,1[} \\
 &= s_0 \left[\varphi_{[0,1[} + \psi_{[0,1[} \right] / 2 + s_1 \left[\varphi_{[0,1[} - \psi_{[0,1[} \right] / 2 \\
 &= \frac{s_0 + s_1}{2} \varphi_{[0,1[} + \frac{s_0 - s_1}{2} \psi_{[0,1[}
 \end{aligned}$$

$\frac{s_0 + s_1}{2}$ exprime la moyenne dans les amplitudes du signal.

$\frac{s_0 - s_1}{2}$ exprime la variation dans les amplitudes du signal.

Exemple 1.

j	0	1
rj	0	1/2
sj	9	1

$$f_{ap} = 9\varphi_{[0,1/2[} + 1\varphi_{[1/2,1[} = \frac{9+1}{2}\varphi_{[0,1[} + \frac{9-1}{2}\psi_{[0,1[} = 5\varphi_{[0,1[} + 4\psi_{[0,1[}$$

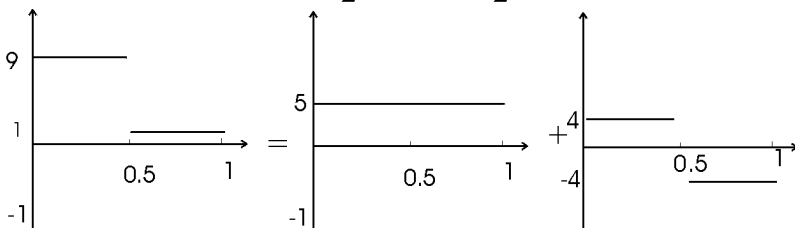


Figure. Exemple d'une transformation en ondelette de base. Ces deux échantillons ont une moyenne de 5 et un saut de -8, soit de 9 à 1.

Déplacement et dilatation de l'ondelette de Haar :

L'ondelette peut débuter à une position u autre que 0, et peut s'étendre sur un intervalle w au lieu de 1 :

$$\psi_{[u,w[}(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \leq r < v \\ -1 & \text{si } v \leq r < w \end{cases} \quad \text{avec } v=u+w/2$$

Simplifications des écritures :

$$\text{Par définition : } \Rightarrow \begin{cases} \varphi_{[u,w[} = \varphi_{[u,v[} + \varphi_{[v,w[} \\ \psi_{[u,w[} = \varphi_{[u,v[} - \varphi_{[v,w[} \end{cases}$$

En additionnant et en soustrayant on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \varphi_{[u,v[} = \frac{\varphi_{[u,w[} + \psi_{[u,w[}}{2} \\ \varphi_{[v,w[} = \frac{\varphi_{[u,w[} - \psi_{[u,w[}}{2} \end{cases}$$

Cette dernière forme est appliquée à un vecteur.

Exemple 2.

j	0	1	2	3
rj	0	1/4	2/4	3/4
sj	5	1	2	8

$$\begin{aligned} f_{ap} &= 5\varphi_{[0,1/4[} + 1\varphi_{[1/4,2/4[} + 2\varphi_{[2/4,3/4[} + 8\varphi_{[3/4,4/4[} \\ &= \frac{5+1}{2}\varphi_{[0,2/4[} + \frac{5-1}{2}\psi_{[0,2/4[} + \frac{2+8}{2}\varphi_{[2/4,4/4[} + \frac{2-8}{2}\psi_{[2/4,4/4[} \\ &= \frac{5+1}{2}\varphi_{[0,1/2[} + \frac{5-1}{2}\psi_{[0,1/2[} + \frac{2+8}{2}\varphi_{[1/2,1[} + \frac{2-8}{2}\psi_{[1/2,1[} \\ &= \underbrace{3\varphi_{[0,1/2[} + 2\psi_{[0,1/2[}}_{1^{\text{ère}} \text{ paire}} + \underbrace{5\varphi_{[1/2,1[} - 3\psi_{[1/2,1[}}_{2^{\text{ème}} \text{ paire}} \end{aligned}$$

Exemple 3.

j	0	1	2	3	4	5	6	7
rj	0	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8
sj	3	1	0	4	8	6	9	9

$$\begin{aligned} f_{ap} &= 3\varphi_{[0,1/8[} + 1\varphi_{[1/8,2/8[} + 0\varphi_{[2/8,3/8[} + 4\varphi_{[3/8,4/8[} + 8\varphi_{[4/8,5/8[} + 6\varphi_{[5/8,6/8[} + 9\varphi_{[6/8,7/8[} + 9\varphi_{[7/8,8/8[} \\ &= \frac{3+1}{2}\varphi_{[0,2/8[} + \frac{3-1}{2}\psi_{[0,2/8[} + \\ &\quad \frac{0+4}{2}\varphi_{[2/8,4/8[} + \frac{0-4}{2}\psi_{[2/8,4/8[} + \\ &\quad \frac{8+6}{2}\varphi_{[4/8,6/8[} + \frac{8-6}{2}\psi_{[4/8,6/8[} + \\ &\quad \frac{9+9}{2}\varphi_{[6/8,8/8[} + \frac{9-9}{2}\psi_{[6/8,8/8[} \\ &= 2\varphi_{[0,2/8[} + 1\psi_{[0,2/8[} + 2\varphi_{[2/8,4/8[} - 2\psi_{[2/8,4/8[} + 7\varphi_{[4/8,6/8[} + 1\psi_{[4/8,6/8[} + 9\varphi_{[6/8,8/8[} + 0\psi_{[6/8,8/8[} \end{aligned}$$

Puisque j et r_j n'apparaissent pas dans l'expression de la fonction approximée, alors les données de la transformée de Haar peuvent être écrites sous forme de s_j seulement.

L'exemple ci-dessus peut alors s'écrire :

j	0	1	2	3	4	5	6	7
r_j	0	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8
s_j	3	1	0	4	8	6	9	9

$$\vec{S} = (3,1,0,4,8,6,9,9)$$

Exercices :

1- Calculer la transformée par l'ondelette de Haar des vecteurs $\vec{S}_1 = (2,8)$, $\vec{S}_2 = (2,4,8,6)$ et $\vec{S}_3 = (8,6,7,3,1,1,2,4)$

2- Montrer que pour une fonction de 4 échantillons (s_0, s_1, s_2, s_3), la moyenne des moyennes des deux paires consécutives est la moyenne des quatre échantillons.

La transformée de Haar rapide et ordonnée

Le calcul de la transformée se fait par étape, et le résultat est classé dans l'ordre selon les étapes.

Exemple : $\vec{S} = (3,1,0,4,8,6,9,9)$

Étape 1.

On fait les paires des sommations :

$$a_1 = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{8+6}{2}, \frac{9+9}{2} \right) = (2,2,7,9)$$

Puis on fait les paires des différences :

$$d_1 = \left(\frac{3-1}{2}, \frac{0-4}{2}, \frac{8-6}{2}, \frac{9-9}{2} \right) = (1,-2,1,0)$$

Étape 2 :

On garde d_1 et on fait la transformation de a_1 :

On fait les paires des sommations :

$$a_2 = \left(\frac{2+2}{2}, \frac{7+9}{2} \right) = (2,8)$$

Puis on fait les paires des différences :

$$d_2 = \left(\frac{2-2}{2}, \frac{7-9}{2} \right) = (0,-1)$$

Étape 3 :

On garde d_2 et on fait la transformation de a_2 :

On fait la paire de sommation :

$$a_3 = \left(\frac{2+8}{2} \right) = (5)$$

Puis on fait la paire de différence :

$$d_3 = \left(\frac{2-8}{2} \right) = (-3)$$

Résultat de la transformation : $f_{ap} = (a_3; d_3; d_2; d_1) = (5; -3; 0; -1; 1; -2; 1, 0)$

Qui s'écrit aussi sous la forme :

$$f_{ap} = 1\psi_{[0,2/8[} - 2\psi_{[2/8,4/8[} + 1\psi_{[4/8,6/8[} + 0\psi_{[6/8,8/8[} \quad \text{Étape 1}$$

$$+ 0\psi_{[0,4/8[} - 1\psi_{[4/8,8/8[} \quad \text{Étape 2}$$

$$- 3\psi_{[0,8/8[} + 5\varphi_{[0,8/8[} \quad \text{Étape 3}$$

Qui est une représentation de f_{ap} :

$$f_{ap} = 3\varphi_{[0,1/8[} + 1\varphi_{[1/8,2/8[} + 0\varphi_{[2/8,3/8[} + 4\varphi_{[3/8,4/8[} + 8\varphi_{[4/8,5/8[} + 6\varphi_{[5/8,6/8[} + 9\varphi_{[6/8,7/8[} + 9\varphi_{[7/8,8/8[}$$

La transformée de Haar rapide et sur place (In-place fast Haar wavelet transform)

La transformée de Haar rapide et ordonnée nécessite la connaissance de toutes les données avant de procéder la transformation, car tous les éléments sont utilisés dans le calcul 2 par 2.

Mais il est possible de faire le calcul avec les éléments déjà disponibles, soient les additions et les soustractions des paires successives : il faut alors identifier les éléments provenant des additions (a) et des soustractions (d).

Exemple 1:

$$\vec{S} = (s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, \dots, s_{2k}, s_{2k+1}, \dots)$$

Étape 1 :

$$f_{ap}^1 = \left(\frac{s_0 + s_1}{2}, \frac{s_0 - s_1}{2}, \frac{s_2 + s_3}{2}, \frac{s_2 - s_3}{2}, \dots \right)$$

$$= (a_1^1, d_1^1, a_1^2, d_1^2, \dots)$$

Étape 2 :

$$f_{ap}^2 = \left(\frac{a_1^1 + a_1^2}{2}, d_1^1, \frac{a_1^1 - a_1^2}{2}, d_1^2, \dots \right)$$

$$= (a_2^1, d_1^1, d_2^1, d_1^2, \dots)$$

Par définition :

- Les étapes de la décomposition ou de la transformation sont appelés niveaux de décomposition ou de transformation.
- Les éléments a de la décomposition forment les coefficients des approximations.
- Les éléments d de la décomposition forment les coefficients des détails.
- Des coefficients des approximations et des détails on peut retrouver le signal de départ : c'est l'opération de la reconstruction du signal ou la transformée inverse.
- Les éléments de la décomposition sont appelés C, pour coefficients.

Exemple 2:

Faire la décomposition avec la méthode rapide et sur place :

$$\vec{S} = (3,1,0,4,8,6,9,9)$$

$$C^1 = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{3-1}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{0-4}{2}, \frac{8+6}{2}, \frac{8-6}{2}, \frac{9+9}{2}, \frac{9-9}{2} \right) = (2,1,2,-2,7,1,9,0)$$

$$C^2 = \left(\frac{2+2}{2}, 1, \frac{2-2}{2}, -2, \frac{7+9}{2}, 1, \frac{7-9}{2}, 0 \right) = (2,1,0,-2,8,1,-1,0)$$

$$C^3 = \left(\frac{2+8}{2}, 1, 0, -2, \frac{2-8}{2}, 1, -1, 0 \right) = (5,1,0,-2-3,1,-1,0)$$

Peu importe la procédure, on doit reconnaître les sommes (φ) et les différences (ψ) pour pouvoir reconstruire le signal.

Exercice 1.

Calculer la transformée ordonnée de $S=(8,6,7,3,1,1,2,4)$.

Exercice 2.

Calculer la transformée sur place de $S=(8,6,7,3,1,1,2,4)$.

La transformée inverse de l'ondelette de Haar, ou reconstruction du signal

Que ce soit avec la transformation de l'ondelette de Haar ordonnée ou sur place, l'essentiel est de pouvoir classer les coefficients des approximations et des détails selon la position des paires et selon les niveaux de décomposition pour un éventuel filtrage et pour la reconstruction.

Exemple.

Reconstruction d'une transformation ordonnée.

$$S=(3,1,0,4,8,6,9,9)$$

$$C^3=(5;-3;0,-1;1,-2,1,0) = (a3;d3;d2;d1)$$

À partir des coefficients d'approximation et de détail, il est possible de retrouver le signal de départ en reconstituant le signal étape par étape et en se basant sur les sommes et les différences.

Exemple déduit du niveau 3 :

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} = a3 \\ \frac{x-y}{2} = d3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 2a3 \\ x-y = 2d3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2(a3+d3) \\ 2y = 2(a3-d3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a3+d3 \\ y = a3-d3 \end{cases}$$

On retrouve C^2 :

$$C^3 = (a3+d3, a3-d3; d2; d1) = (5-3; 5+3; 0, -1; 1, -2, 1, 0) = (2, 8; 0, -1; 1, -2, 1, 0) = (a2; d2; d1)$$

On remonte à C^1 , toujours en calculant les éléments x et y à partir des coefficients d'approximation et de détail du niveau concerné tout en respectant l'ordre des paires d'éléments :

$$C^1 = (a2+d2, a2-d2; d1) = (2+0, 2-0, 8-1, 8+1; 1, -2, 1, 0) = (2, 2, 7, 9; 1, -2, 1, 0) = (a1; d1)$$

Finalement on reconstruit C^1 pour arriver au vecteur de départ S :

$$C^1 = (a1+d1, a1-d1; d1) = (2+1, 2-1, 2-2, 2+2, 7+1, 7-1, 9+0, 9-0) = (3, 1, 0, 4, 8, 6, 9, 9)$$